Th. de Thalès /

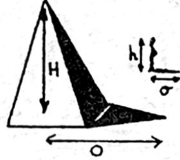




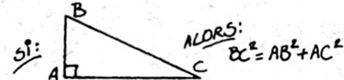

A. HISTORIQUE :

THALÈS, UN DES SEPT SAGES DE LA GRÈCE ANTIQUE (IL EST NÉ VERS 640 AVANT J.-C. À MILET) TROUVA UN MOYEN TRÈS SIMPLE DE MESURER LA HAUTEUR DES PYRAMIDES D'ÉGYPTE EN RESTANT AU SOL : IL ATTENDIT, UN JOUR DE PLEIN SOLEIL, QUE LA TAILLE DE SON OMBRE SOIT ÉGALE À LA SIENNE... ET EN CONCLUT QU'IL EN ÉTAIT DE MÊME POUR LE MONUMENT :

SI $h = \sigma$,
ALORS $H = O$.




QUELQUES ANNÉES PLUS TARD, EN GRÈCE TOUJOURS, PYTHAGORE (580-504 AV. J.-C., À SAMOS) DÉCOUVRAIT LE THÉORÈME QUI PORTERAIT SON NOM :

SI :


ALORS : $BC^2 = AB^2 + AC^2$

LAISSONS PASSER DEUX SIÈCLES : EUCLIDE (323-283 AV. J.-C.) LE GÉOMÈTRE REPREND LE THÉORÈME DE THALÈS EN L'AFFINANT :

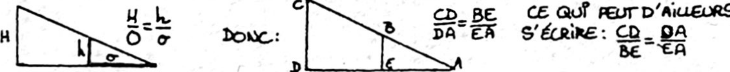
SI $h = \sigma$, ALORS $H = O$ : DONC SI $\frac{h}{\sigma} = 1$, ALORS $\frac{H}{O} = 1$ ... D'OÙ : $\frac{h}{\sigma} = \frac{H}{O}$.

EN FAIT, IL N'EST NUL BESOIN D'ATTENDRE QUE LA TAILLE DE L'OMBRE SOIT ÉGALE À LA TAILLE DU PERSONNAGE, IL SUFFIT DE DIRE QUE LE RAPPORT EST CONSERVÉ :



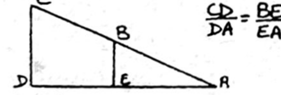

$\frac{H}{O} = \frac{h}{\sigma}$

EN RASSEMBLANT ET EN SCHÉMATISANT, CELA DONNE :




$\frac{H}{O} = \frac{h}{\sigma}$ DONC : $\frac{CD}{DA} = \frac{BE}{EA}$ CE QUI PEUT D'AILLEURS S'ÉCRIRE : $\frac{CD}{BE} = \frac{DA}{EA}$

NOUS NE NOUS ARRÊTERONS PAS LÀ ! EN EFFET, À PARTIR DE :




$\frac{CD}{DA} = \frac{BE}{EA}$

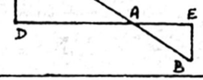
a. PROUVEZ QUE $CD^2 \cdot EA^2 = BE^2 \cdot DA^2$
b. EN UTILISANT LE THÉORÈME DE PYTHAGORE, EXPRIMEZ $CD^2$ ET $BE^2$.
c. REMPLACEZ CES DEUX TERMES DANS a. POUR PROUVER QUE : $CA^2 \cdot EA^2 = BA^2 \cdot DA^2$
d. EN DÉDUIRE QUE $\frac{CA}{BA} = \frac{DA}{EA}$.

ÇA Y EST ! LE THÉORÈME DE THALÈS EST COMPLET :

SI : (C, B, D, E, A) ALORS : $\frac{CD}{BE} = \frac{DA}{EA} = \frac{CA}{BA}$.

... EN TRIPATOUILLANT UN PEU LES DISTANCES, ON ARRIVERA AUSSI À $\frac{BC}{BA} = \frac{ED}{EA}$ ; OU $\frac{BC}{CA} = \frac{ED}{DA}$ ...

... ET CES ÉGALITÉS RESTENT VRAIES MÊME SI [CD] ET [BE] SONT DE PART ET D'AUTRE DU POINT A :



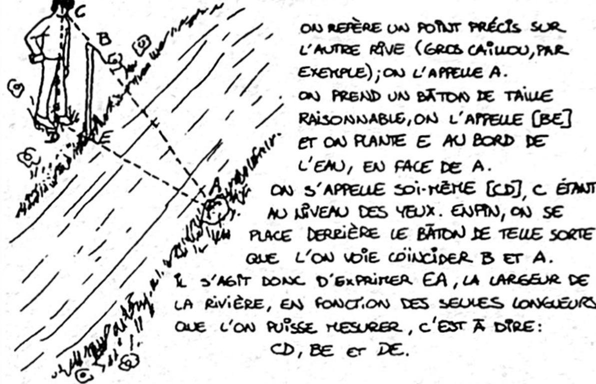




B. EXEMPLES D'UTILISATION :

ON N'INVENTE RIEN, C'EST EUCLIDE LUI-MÊME QUI NOUS LES PROPOSE :

1. MESURER LA LARGEUR D'UNE RIVIÈRE QUE L'ON NE PEUT TRAVERSER :

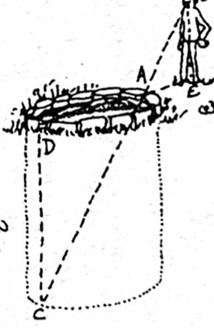



ON REPÈRE UN POINT PRÉCIS SUR L'AUTRE RIVE (GROS CAILLOU, PAR EXEMPLE) ; ON L'APPELLE A.
ON PREND UN BÂTON DE TAILLE RAISONNABLE, ON L'APPELLE [BE] ET ON PLANTE E AU BORD DE L'EAU, EN FACE DE A.
ON S'APPELLE SOI-MÊME [CD], C ÉTANT AU NIVEAU DES YEUX. ENFIN, ON SE PLACE DERRIÈRE LE BÂTON DE TELLE SORTE QUE L'ON VOIE COÏNCIDER B ET A.
IL S'AGIT DONC D'EXPRIMER EA, LA LARGEUR DE LA RIVIÈRE, EN FONCTION DES SEULES LONGUEURS QUE L'ON PUISSE MESURER, C'EST À DIRE :
CD, BE ET DE.

a. FAIRE UN SCHÉMA DE LA SITUATION.
b. PROUVER QUE $AD \cdot EB = DC \cdot AE$
c. SACHANT QUE $AD = AE + ED$, DÉDUIRE DE b. QUE $AE(DC - EB) = ED \cdot EB$ PUIS QUE $AE = \frac{ED \cdot EB}{DC - EB}$
d. APPLICATION NUMÉRIQUE : TROUVER AE SI : BE = 1,40 m ; CD = 1,70 m ; ET DE = 1 m

2. MESURER LA PROFONDEUR D'UN PUITS DONT ON VOIT LE FOND, SANS Y DESCENDRE :

ON CHOISIT UN DIAMÈTRE DU BORD DU PUITS ; ON L'APPELLE [AD].
À LA VERTICALE DE D, AU FOND DU PUITS, ON REPÈRE LE POINT C.
ON S'APPELLE SOI-MÊME [BE] ; ET ON SE PLACE DE TELLE SORTE QUE NOS YEUX (B) VOIENT COÏNCIDER A ET C.
CETTE FOIS, IL FAUT EXPRIMER LA PROFONDEUR CD DU PUITS EN FONCTION DES SEULES LONGUEURS MESURABLES AD, BE ET EA.

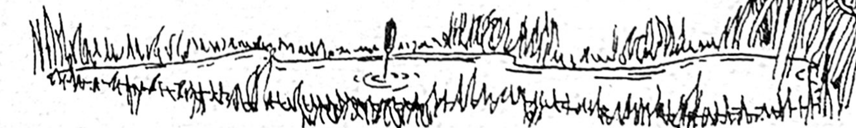



a. FAIRE UN SCHÉMA DE LA SITUATION.
b. TROUVER L'ÉGALITÉ RELIANT CD À AD, BE ET EA.
c. APPLICATION NUMÉRIQUE : TROUVER CD SI
EB = 1,70 m
DA = 1,50 m
EA = 0,70 m.

3. MESURER LA PROFONDEUR D'UN ÉTANG GLAUQUE SANS Y PLONGER :

ICI, THALÈS N'Y EST POUR RIEN... NI EUCLIDE, D'AILLEURS : C'EST JUSTE POUR VOIR SI PYTHAGORE SERT À QUELQUE CHOSE :

UN ROSEAU, ENRACINÉ AU FOND DE L'ÉTANG, DÉPASSE LA SURFACE DE 30 cm. ON INCLINE CE ROSEAU, SANS COURBER SA TIGE, JUSQU'À CE QUE SA TÊTE AFFLEURE LA SURFACE DE L'ÉTANG : ELLE EST ALORS À 90 cm DE L'ENDROIT OÙ LE ROSEAU SORTAIT DE L'EAU.
a/. SCHÉMATISER LA SITUATION. (AVANT ET APRÈS INCLINAISON, SUR LE MÊME DESSIN).
b/. CALCULER LA PROFONDEUR DE L'ÉTANG À CET ENDROIT.



G. CHAUMEIL - 04 - 84 -

(3⁻) Th. de Thalès et application au triangle.

## I Th. de Thalès

① Soit ABC un triangle rectangle en A et I le milieu de [AC]. La perpendiculaire (Δ) à (AC) passant par I coupe [BC] en J. Démontrer que J est le milieu de [BC].

② Tracer un segment [AB] de longueur 6,3 cm puis le cercle $\mathcal{C}$ de diamètre [AB]. On choisit un point M sur ce cercle, distinct de A et B. On désigne par K le point de la droite (AM) tel que : $\frac{\overline{KM}}{\overline{AM}} = \frac{3}{4}$. La perpendiculaire à (AM) passant par K coupe (AB) en T.
Calculer AT.

③ Soient un trapèze ABCD et M un point de [AD]. La parallèle (Δ) aux droites (AB) et (CD) en M coupe [BC] en N. Calculer NC sachant que AM = 2 ; AD = 7 et BN = 2,8.

④ Soient un trapèze ABCD et M un point de [AD]. La parallèle (Δ)' aux droites (AB) et (CD) coupe [BC] en N. Calculer AD et BC sachant que AM = 4,5 ; NC = 2 et MD = NB.

⑤ Tracer un triangle ABC tel que AB = 4,2 cm et AC = 6,3 cm. Soit M le point de [AB] tel que AM = 1,4 cm. Soit N le projeté de M sur (AC) parallèlement à (BC). Calculer AN et NC.

⑥ Soient un triangle ABC et M le point de la droite (AB) qui vérifie $\overline{AM} = 2,5 . \overline{AB}$. Par M, on mène la parallèle (Δ) à (BC). (Δ) coupe (AC) en N. Calculer CN dans les cas suivants : a) AC = 3 cm b) AC = 4,5 cm

## II Th. de Thalès appliqué aux triangles

⑦ Un triangle ABC est tel que AB = 16 cm et BC = 24 cm. Soit M le point de [AB] tel que AM = 4 cm. Par M, on trace la parallèle à (BC) : elle coupe (AC) en N. Calculer MN.

⑧ a) Construire un trapèze ABCD de bases [AB] et [CD] et tel que :
AB = 4,5 cm , BC = 3,5 cm , CD = 7,2 cm et DA = 4 cm (NB : on pourra tatonner...)
b) On prolonge les côtés non parallèles qui se coupent en M.
Calculer MA et MB.

⑨ Soit un triangle ABC et M et N les points des droites (AC) et (AB) qui vérifient : $\overline{AM} = -\frac{1}{3}\overline{AC}$ et $\overline{AN} = -\frac{1}{3}\overline{AB}$. Sachant que AC = 4 cm et BC = 5 cm, calculer AM et MN.

⑩ Comment évaluer la largeur d'une rivière ?
a) Exprimer la largeur $\ell$ = OA de la rivière ci-contre en fonction de AB, AC et BD.
b) Calculer $\ell$ lorsque AC = 3 m , BD = 5 m et AB = 2 m

⑪ On veut mesurer la hauteur d'un sapin grâce à un bâton BB' de 2,5 m que l'on plante verticalement à 9 m du pied du sapin. On se place derrière jusqu'à ce que l'œil o situé à 1 m du sol voit en alignement le sommet S de l'arbre et l'extrémité B du bâton. On mesure les distances ci-contre.
Quelle est la hauteur du sapin ?
(cf Brevet Paris 87)

